MATEMATICA FINANZIARIA (30 ore) - Principali formule

REGIMI DI CAPITALIZZAZIONE E ATTUALIZZAZIONE

– Fattore di montante (t durata)
 regime a interessi semplici: $f(t) = 1 + it$
 regime a interessi composti $f(t) = (1 + i)^t$
 regime dello sconto commerciale: $f(t) = \frac{1}{1-dt}$ $(t < \frac{1}{d})$
 regime esponenziale (intensità costante): $f(t) = e^{\delta t}$
– Fattore di sconto (t durata)
 regime dello sconto razionale o semplice: $\phi(t) = \frac{1}{1+it}$
 regime dello sconto commerciale: $\phi(t) = 1 - dt$
 regime dello sconto composto: $\phi(t) = (1 + i)^{-t}$
 regime esponenziale (intensità costante): $f(t) = e^{-\delta\ t}$
– Tassi equivalenti
 $(1 + i) = (1 + i_k)^k$, k periodi nell'anno, regime interesse composto
 tasso convertibile: $j_k = k\ i_k$
 tasso d'interesse e tasso di sconto: $d = \frac{i}{1+i}$
 tasso e intensità istantanea d'interesse: $\delta = \ln(1 + i)$

RENDITE

– Rendita posticipata, n rate unitarie: valore attuale: $a_{n\rceil i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$
 montante: $s_{n\rceil i} = \frac{(1+i)^n-1}{i} = a_{n\rceil i}\ (1 + i)^n$

STRUTTURA A TERMINE DEI TASSI all'epoca 0

– Prezzi a pronti (spot): $v^{(0)}(0, t)$
– Prezzi a termine (forward): $v^{(0)}(s, t) = \frac{v^{(0)}(0,t)}{v^{(0)}(0,s)}$ $(0 \leq s < t)$
– Tassi a pronti (spot): $h^{(0)}(0, t)$
– Tassi a termine (forward): $h^{(0)}(s, t)$
– Relazione fondamentale a pronti: $v^{(0)}(0, t)\left[1 + h^{(0)}(0, t)\right]^t = 1$
– Relazione fondamentale a termine: $v^{(0)}(s, t)\left[1 + h^{(0)}(s, t)\right]^{t-s} = 1$

AMMORTAMENTI (S importo prestito, C_t quota capitale, R_t rata, durata n)

– Condizione di chiusura
 elementare: $S = \sum_{t=1}^n C_t$, iniziale: $S = \sum_{t=1}^n R_t\ (1+i)^{-t}$, finale: $S\ (1+i)^n = \sum_{t=1}^n R_t\ (1+i)^{n-t}$
– Debito residuo: $D_t = \sum_{s=t+1}^n C_s = \sum_{s=t+1}^n R_s\ (1 + i)^{-(s-t)}$
– Debito estinto: $E_t = S - D_t$
– Quota interessi: $I_t = D_{t-1}\ i$
– Rata: $R_t = C_t + I_t$
– Relazioni ricorrenti per il debito residuo: $D_{t+1} = D_t - C_{t+1}$; $D_{t+1} = D_t\ (1 + i) - R_{t+1}$;
 nel caso di rate non equidistanti: $D_{s+1} = D_s\ (1 + i)^{t_{s+1}-t_s} - R_{s+1}$
– Ammortamento italiano
 quota capitale: $C_t = C = \frac{S}{n}$ rata: $R_{t+1} = R_t - C\ i$
 debito residuo: $D_t = (n - t)\ C = \frac{n-t}{n} S$
– Ammortamento francese
 rata: $R = S/a_{n\rceil i}$ debito residuo: $D_t = Ra_{n-t\rceil i}$;

SCELTE FINANZIARIE
(flussi operazione a_s alle epoche t_s, flussi finanziamento f_s alle epoche t_s)

– Scomposizione del VAN
outstanding capital: $w_0 = -a_0$, w_1, w_2, ..., $w_n = 0$

tasso di rendimento periodale: $x_k^* = \frac{a_k + w_k - w_{k-1}}{w_{k-1}}$
contributo periodale: $g_k = w_{k-1}\left(x_k^* - i\right)/(1+i)^k$

DURATA MEDIA FINANZIARIA (flussi a_s alle epoche t_s)

– Durata media finanziaria: $D = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k t_k (1+i)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n} a_k (1+i)^{-t_k}}$
– oppure $D = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k t_k e^{-\delta t_k}}{\sum_{k=1}^{n} a_k e^{-\delta t_k}}$
– Convessitá: $C = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k t_k^2 e^{-\delta t_k}}{\sum_{k=1}^{n} a_k e^{-\delta t_k}}$
– Tasso di variazione del prezzo: $\frac{\Delta P}{P} \simeq -\frac{D}{(1+i)}\Delta i$
– oppure $\frac{\Delta P}{P} \simeq -D\Delta\delta + \frac{1}{2}C\left(\Delta\delta\right)^2$
– Durata media finanziaria di un portafoglio:
x_A e x_B: unitá dei titoli A e B in portafoglio
P_A e P_B: prezzi unitari dei titoli A e B
D_A e D_B: durata media finanziaria dei titoli A e B
W_0: ricchezza da investire nel portafoglio, D_{port}: durata media finanziaria del portafoglio

$$\begin{cases} x_A P_A + x_B P_B = W_0 \\ \frac{x_A P_A D_A + x_B P_B D_B}{x_A P_A + x_B P_B} = D_{port} \end{cases}$$

PROGRAMMAZIONE LINEARE

Problema primale: variabile $\mathbf{x}$, con $\mathbf{c}$, $\mathbf{x} \in R^n$, $A \in \mathcal{M}\left(m,n\right)$, $\mathbf{b} \in R^m$

$$\begin{array}{cc} \max \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \min \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ s.t.\ \ A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} & s.t.\ \ A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Problema duale: variabile $\mathbf{y}$, con $\mathbf{b}$, $\mathbf{y} \in R^m$, $A^T \in \mathcal{M}\left(n,m\right)$, $\mathbf{c} \in R^n$

$$\begin{array}{cc} \min \mathbf{b}^T\mathbf{y} & \max \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ s.t.\ \ A^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c} & s.t.\ \ A^T\mathbf{x} \leq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0} & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

SISTEMI DINAMICI

Equilibrio di un sistema dinamico discreto: dato il sistema dinamico

$$\mathbf{x}(t+1) = f\left[\mathbf{x}(t), t\right]$$

la condizione d'equilibrio $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ si trova risolvendo il sistema

$$\mathbf{x}^* = f\left(\mathbf{x}^*\right)$$