

Formule algebriche e trigonometriche

Raccolgo qui alcune formule che sono utili da capire e tenere a mente: molte saranno già ben note dagli studi elementari, medi e superiori.

1 Formule algebriche

Differenza di due potenze: se $x, y \in \mathbb{R}$

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

o, in forma razionale (in questo caso supponiamo $xy \neq 0$):

$$x - y = \frac{x^n - y^n}{x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1}}$$

In particolare, per $x = 1$ troviamo la formula per la progressione geometrica:

$$1 + y + y^2 + \dots + y^{n-1} = \frac{1 - y^n}{1 - y}$$

che ha senso solo per $y \neq 1$.

Definiamo il *coefficiente binomiale* $\binom{n}{m}$ per due numeri naturali $m \leq n$ come

$$\begin{aligned} \binom{n}{m} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-m)} \\ &= \frac{(n-m+1) \cdot (n-m+2) \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} \end{aligned}$$

Ad esempio

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = n$$

In generale

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

e vale il teorema di Pascal:

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} = \binom{n+1}{m}$$

che consente di calcolare ricorsivamente i coefficienti binomiali e di costruire con essi il famoso triangolo di Pascal.

Formula di Newton per la potenza di un binomio

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

Per esteso:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

Casi particolari interessanti si hanno per $x = y = 1$ e $y = 1$:

$$2^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$$

e

$$(x+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i$$

Una generalizzazione della formula di Newton è quella di Leibniz per la potenza di una somma di termini:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_m \\ i_1 + i_2 + \dots + i_m = n}} \frac{n!}{i_1! i_2! \dots i_m!} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_m^{i_m}$$

La somma è estesa a m indici che variano fra 0 e n in modo che la loro somma resti sempre uguale a n ; ad esempio in

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3 \\ i_1 + i_2 + i_3 = 2}} \frac{2!}{i_1! i_2! i_3!} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}$$

la somma è effettuata per le seguenti terne di indici: $(2, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 0, 2)$, quindi

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

2 Valori assoluti

Se $x, y \in \mathbb{R}$ allora

$$|x| = 0 \iff x = 0$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$|xy| \leq |x||y|$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y|$$

3 Formule trigonometriche

Ricordiamo che le funzioni trigonometriche fondamentali sono il seno $\operatorname{sen} x$ ed il coseno $\operatorname{cos} x$: sono definite su tutto \mathbb{R} e la loro immagine è l'intervallo $[-1, 1]$.

La relazione fondamentale fra queste funzioni è il teorema di Pitagora:

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1$$

Seno e coseno sono limitate:

$$|\operatorname{sen} x| \leq 1 \quad |\operatorname{cos} x| \leq 1$$

e periodiche di periodo 2π :

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{cos}(x + 2\pi) = \operatorname{cos} x$$

Il seno è una funzione dispari e il coseno è una funzione pari:

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{cos}(-x) = \operatorname{cos} x$$

Le seguenti relazioni dovrebbero essere ben note:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\operatorname{cos} x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \operatorname{cos} y + \operatorname{cos} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{cos}(x + y) = \operatorname{cos} x \operatorname{cos} y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x$$

$$\operatorname{cos} 2x = \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \operatorname{cos} y - \operatorname{cos} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{cos}(x - y) = \operatorname{cos} x \operatorname{cos} y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x - y}{2} \operatorname{cos} \frac{x + y}{2}$$

$$\operatorname{cos} x - \operatorname{cos} y = -2 \operatorname{sen} \frac{x - y}{2} \operatorname{sen} \frac{x + y}{2}$$

Per mezzo di seno e coseno definiamo la tangente $\tan x = \sin x / \cos x$, la cotangente $\cot x = \cos x / \sin x$, la secante $\sec x = 1 / \cos x$ e la cosecante $\operatorname{cosec} x = 1 / \sin x$.

La tangente è una funzione definita in $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}_{\pi/2+k\in\mathbb{Z}}$ (cioè non è definita nei punti dove il coseno si annulla) ed ha come immagine \mathbb{R} . Si tratta di una funzione periodica di periodo π .

$$\boxed{\tan(x + \pi) = \tan x}$$

di una funzione dispari

$$\boxed{\tan(-x) = -\tan x}$$

Inoltre

$$\boxed{\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}}$$

$$\boxed{\tan x = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}$$

Le funzioni $\sin x$, $\cos x$ e $\tan x$ sono periodiche, quindi non sono iniettive e non ammettono inverse; se però le consideriamo in un intervallo nel quale sono monotone possiamo invertirle.

Consideriamo il seno: se ci restringiamo a considerarlo in $[-\pi/2, \pi/2]$ allora è una funzione crescente, e quindi invertibile; la sua inversa, *in questo intervallo* si denota $\arcsin x$. Quindi $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione la cui immagine è $[-\pi/2, \pi/2]$ e che è definita dall'equazione

$$\arcsin \sin x = x$$

Si noti che se $x \notin [-\pi/2, \pi/2]$ questa equazione è falsa: ad esempio

$$\arcsin \sin \pi = \arcsin 0 = 0$$

(esercizio: si provi a tracciare il grafico della funzione $\arcsin \sin x$ in tutta la retta reale). Invece

$$\sin \arcsin x = x$$

per ogni valore $x \in [-1, 1]$; per altri valori di x l'equazione non ha senso.

Analogamente si definisce l'arcocoseno, stavolta considerando l'intervallo $[0, \pi]$ nel quale il coseno è una funzione decrescente, quindi invertibile; la sua inversa, *in questo intervallo* si denota $\arccos x$. Quindi $\arccos : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione la cui immagine è $[0, \pi]$ e che è definita dall'equazione

$$\arccos \cos x = x$$

Si noti che se $x \notin [0, \pi]$ questa equazione è falsa: ad esempio

$$\arccos \cos \frac{3}{2}\pi = \arccos 0 = 1$$

(esercizio: si provi a tracciare il grafico della funzione $\arccos \cos x$ in tutta la retta reale). Invece

$$\cos \arccos x = x$$

per ogni valore $x \in [-1, 1]$; per altri valori di x l'equazione non ha senso.

Possiamo anche invertire la tangente nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ dove è una funzione crescente (anche se non limitata), quindi invertibile; la sua inversa, *in questo intervallo* si denota $\arctan x$. Quindi $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione la cui immagine è $[-\pi/2, \pi/2]$ e che è definita dall'equazione

$$\arctan \tan x = x$$

Si noti che se $x \notin [-\pi/2, \pi/2]$ questa equazione è falsa: ad esempio

$$\arctan \tan \pi = \arctan 0 = 0$$

(esercizio: si provi a tracciare il grafico della funzione $\arctan \tan x$ in tutta la retta reale). Invece

$$\tan \arctan x = x$$

per ogni valore $x \in \mathbb{R}$.

NB: La scelta degli intervalli $[-\pi/2, \pi/2]$ e $[0, \pi]$ è convenzionale: ci sono infiniti intervalli, ottenuti traslando di π , nei quali poter invertire seno, tangente e coseno; abbiamo scelto degli intervalli che contenessero lo zero.

Notiamo per finire la seguente formula per l'arcotangente:

$$\arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan x & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$