Sistemi di equazioni lineari

Introduzione

Un sistema di n equazioni lineari in n incognite $x_1, x_2, ..., x_n$ può scriversi in notazione algebrica:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2$

.... (1.1)

....

$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n$

ove i termini a_{ij} sono i coefficienti del sistema, mentre $b_1, b_2, ... , b_n$ sono i termini noti o in forma matriciale compatta:

$A X = B$ (1.2)

dove:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ = matrice dei coefficienti del sistema (1.3)

Il rango della matrice A (massimo numero di righe o di colonne di A linearmente indipendenti tra loro) si dice anche rango del sistema. Se esso è pari al numero di equazioni (ovvero, nel nostro caso, al numero delle incognite) , il sistema lineare si dice normale.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ = vettore colonna delle incognite (1.4)

B = $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots\cdots \\ b_n \end{bmatrix}$ = vettore colonna dei termini noti (1.5)

Indichiamo inoltre con **A’** la seguente matrice:

A’ = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$ = matrice dei coefficienti e termini noti o matrice completa (1.6)

Soluzione dei sistemi lineari

I metodi per risolvere sistemi di equazioni lineari possono suddividersi in due categorie:
metodi diretti;
metodi iterativi.
I metodi diretti sono basati su procedure sistematiche di eliminazione algebrica, che portano alla soluzione in un numero ben definito di operazioni. La soluzione se non intervenissero errori di rappresentazione dei dati e di arrotondamento nei calcoli sarebbe "esatta". Tra questi si ricordano il metodo di sostituzione diretta, la regola di Cramer ed il metodi di eliminazione di Gauss e di Gauss - Jordan, di cui ci occuperemo in seguito. Tra i metodi diretti non sono automatizzabili (vista la inaccettabile complessità computazionale) i metodi di sostituzione e di Cramer.
I metodi iterativi invece, non prevedono un numero preefissato di iterazioni, e portano ad una soluzione "approssimata", nel senso che essa sará comunque affetta da un errore, che teoricamente puó essere reso piccolo a piacere aumentando il numero delle iterazioni.
Dal punto di vista pratico si fissa il vettore soluzione $X^{(0)}$ (prima iterazione) arbitrariamente, si sostituiscono i suoi valori nel sistema e se lo soddisfa vuol dire che esso rappresenta la soluzione e quindi si interrompe il calcolo, altrimenti, in base all'errore commesso si determina un nuovo valore $X^{(1)}$ e si itera il procedimento fino a quando la successione dei valori generati converge verso la soluzione.
Alcuni esempi di metodi iterativi sono il metodo di Jacobi ed il metodo di Gauss - Seidel.
Anche se non esiste un criterio che possa indicare a priori quale metodo risolutivo adottare, risulta che i metodi diretti che certamente offrono maggiori garanzie, al crescere delle dimensioni del sistema vengono sostituiti dai i metodi iterativi.

Metodo di Gauss-Jordan

Il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan (una variante del metodo di Gauss) è basato sulla trasformazione della matrice

A' nella forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{b}_n \end{bmatrix}$$

cui corrisponde la seguente soluzione del sistema: $x_1 = \tilde{b}_1$ .... $x_n = \tilde{b}_n$

Tale metodo si basa su *n* iterazioni identificate dall'indice k durante le quali vengono trasformati i coefficienti del sistema..
Durante la prima iterazione k=1 si vuole ridurre a 1 il coefficiente di x1 nella prima equazione, e a 0 in tutte le altre, pertanto:
si divide la riga k-esima per a_{kk} e ciascuna delle rimanenti righe per il coefficiente di x1;
si sottrae la riga k da tutte le altre righe;
in questo modo la matrice A' si trasforma in:

$$\begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{a_{11}} & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} & \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{21}} & \frac{a_{22}}{a_{21}} & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{21}} & \frac{b_2}{a_{21}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1}}{a_{n1}} & \frac{a_{n2}}{a_{n1}} & \dots & \frac{a_{nn}}{a_{n1}} & \frac{b_n}{a_{n1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots \frac{a_{1n}}{a_{11}} & \frac{b_1}{a_{11}} \\ 0 & \frac{a_{22}}{a_{21}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots \frac{a_{2n}}{a_{21}} - \frac{a_{1n}}{a_{11}} & \frac{b_2}{a_{21}} - \frac{b_1}{a_{11}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{a_{n2}}{a_{n1}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots \frac{a_{nn}}{a_{n1}} - \frac{a_{1n}}{a_{11}} & \frac{b_n}{a_{n1}} - \frac{b_1}{a_{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{bmatrix}$$

Come detto tale trasformazione è stata derivata eseguendo:
sulla riga k la trasformazione dei coefficienti a_{kj} in $a'_{kj} = a_{kj} / a_{kk}$ (j = i, i + 1, ... DIM)
e sulle righe i la trasformazione dei coefficienti: a_{ij} in $a'_{ij} = a_{ij} - a'_{kj} * a_{ik}$ (j = i, i + 1, ... DIM)
Si procede quindi con l'iterazione successiva.
Durante la seconda iterazione k=2 si vuole ridurre a 1 il coefficiente di x2 nella seconda equazione, e a 0 in tutte le altre, pertanto:
si divide la riga k-esima per a_{kk} e le rimanenti righe per il coefficienti di x2;
si sottrae la riga k da tutte le altre righe;
in questo modo la matrice A' si trasforma in:

$$
\begin{bmatrix}
1 & \frac{a_{12}}{a_{12}} & \cdots\cdots & \frac{a_{1n}}{a_{12}} & \frac{b_1}{a_{12}} \\
0 & \frac{a_{22}}{a_{22}} & \cdots\cdots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} & \frac{b_2}{a_{22}} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \frac{a_{n2}}{a_{n2}} & \cdots\cdots & \frac{a_{nn}}{a_{n2}} & \frac{b_n}{a_{n2}}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots\ \frac{a_{1n}}{a_{12}}-\frac{a_{2n}}{a_{22}} & \frac{b_1}{a_{12}}-\frac{b_2}{a_{22}} \\
0 & 1 & \cdots\ \frac{a_{2n}}{a_{22}}-\frac{a_{2n}}{a_{22}} & \frac{b_2}{a_{22}}-\frac{b_2}{a_{22}} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdot\cdot\ \frac{a_{nn}}{a_{n2}}-\frac{a_{2n}}{a_{22}} & \frac{b_n}{a_{n2}}-\frac{b_2}{a_{22}}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots\cdots & a''_{1n} & b''_1 \\
0 & 1 & \cdots\cdots & a''_{2n} & b''_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots\cdots & a''_{nn} & b''_n
\end{bmatrix}
$$

all'ultima iterazione (quella di indice n) la matrice si sarà trasformata nella seguente:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & \tilde{b}_1 \\
0 & 1 & \cdots\cdots & 0 & \tilde{b}_2 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & \tilde{b}_n
\end{bmatrix}
$$

ove nella colonna di indice n+1 troviamo le soluzioni del sistema.